# POLITECNICO DI TORINO

**Corso di Laurea**
**in Matematica per l'Ingegneria**

Tesi di Laurea

# Teoria della Scelta Sociale

**Relatore**
prof. Giacomo Como
*firma del relatore*

**Candidato**
Gaetano Scaduto
*firma del candidato*

Anno Accademico 2019-2020

*Ai miei genitori, Vincenzo e Laura*

# Indice


**1 Introduzione** 3

**2 Modellazione dei sistemi di voto** 5
- 2.1 Introduzione ai Sistemi di Voto . . . . . 5
- 2.2 Patologie dei sistemi di voto . . . . . 7
  - 2.2.1 Il Sistema Maggioritario . . . . . 7
  - 2.2.2 I Sistemi Posizionali . . . . . 9

**3 I teoremi di Arrow e di Gibbard-Satterthwhite** 12
- 3.1 Il Teorema di Arrow . . . . . 12
- 3.2 Il Teorema di Gibbard Satterthwhite . . . . . 15

**4 Teoria di Condorcet** 17
- 4.1 Il Teorema dell'Elettore Mediano . . . . . 17
- 4.2 Il Teorema della Giuria di Condorcet . . . . . 19

**5 Voto non sincero per causa comune** 23
- 5.1 Concetti fondamentali di Teoria dei giochi . . . . . 23
- 5.2 L'esempio dell'Urna . . . . . 25
- 5.3 Giuria unanime . . . . . 26

**6 Conclusioni** 30

**Bibliografia** 32

# Capitolo 1

# Introduzione

La teoria della scelta sociale ha l'obbiettivo di analizzare, categorizzare e fornire alcuni risultati inerenti ai processi di voto, intesi come meccanismi messi in atto al fine di produrre, da un insieme di preferenze individuali, un'insieme di preferenze che rappresentino in qualche modo la collettività. Si tratta dunque della teoria attraverso la quale estrapoliamo delle considerazioni su *come* prendere decisioni. Il sistema di voto che usiamo per operare la scelta influenza pesantamente la conclusione alla quale si giunge e dunque è bene conoscere profondamente forze e debolezze del sistema che si decide di adottare. Formulare una decisione collettiva è alla base della vita di una società in ogni suo aspetto: dal selezionare chi viene eletto in parlamento allo scegliere il locale dove trascorrere una serata, ed è quindi fondamentale avere consapevolezza di come non esista un sistema di voto adatto ad ogni situazione e di come ogni sistema presenti, in determinate situazioni, delle criticità.

Andremo dunque in un primo momento a chiarire il concetto di preferenza e fornire due concetti equivalenti attraverso i quali sarà possibile rappresentare quest'idea. Successivamente definiremo i sistemi di voto e alcune buone proprietà che richiederemo ad un sistema di voto che sia coerente e ben definito. Analizzeremo poi le due principali tipologie di sistemi di voto: il sistema maggioritario ed i sistemi posizionali. Mostreremo i punti di debolezza di questi sistemi, analizzando situazioni nelle quali manifestano le patologie intrinseche in maniera più evidente. Arriveremo dunque a fornire un risultato di impossibilità centrale nella teoria della scelta sociale: il Teorema di Arrow. Questo teorema, insieme al Teorema di Gibbard-Satterthwhite, segnerà una battuta d'arresto per lo sviluppo della nostra teoria, a meno di non voler formulare ulteriori ipotesi sullo stato delle preferenze degli individui. Da queste ulteriori ipotesi potremo arrivare ad un'altro importante risultato: il Teorema dell'Elettore Mediano, che finalmente ci fornirà qualche strumento per provare a prevedere i risultati di un processo di voto. Successivamente cambieremo il *fine* dei nostri processi di voto, e studieremo quelle situazioni aventi l'obbiettivo di produrre la decisione *migliore*. In un primo momento supporremo che i votanti siano sinceri, e dunque non siano presenti strategie di qualsivoglia sorta. Incontreremo il Teorema della Giuria di Condorcet e cercheremo di generalizzarlo. Infine, considereremo anche il caso in cui i giocatori possano effettivamente adoperare delle strategie, e per dare una completezza maggiore alla trattazione richiameremo alcuni concetti fondamentali della teoria dei giochi.

La restante parte di questo documento è così organizzata: nel capitolo 2 daremo tutti gli strumenti per definire un sistema di voto, introdurremo le principali proprierà che richiediamo ad un buon sistema di voto e forniremo degli esempi atti ad evidenziare le patologie che questi possono manifestare. Nel capitolo 3 enunceremo e dimostreremo i teoremi di Arrow e Gibbard-Satterthwhite. Il capitolo 4 a sua volta sarà diviso in due sotto-capitoli, il primo riguardante il Teorema dell'elettore mediano ed il secondo il teorema della giuria di Condorcet e le sue conseguenze. Infine, nel capitolo 5 sono contenuti gli elementi di raccordo tra la teoria della scelta sociale e la teoria dei giochi. Al capitolo 6, infine, sono affidate le conclusioni.

# Capitolo 2

# Modellazione dei sistemi di voto

## 2.1 Introduzione ai Sistemi di Voto

Per gli argomenti trattati in questa sezione e nella successiva, ci baseremo principalmente sui testi [3] e [4] presenti in bibliografia.

Supponiamo di avere un insieme di individui $K = \{1, \ldots, k\}$ tale che $|K| = k$, con k dispari. Nel corso della trattazione, ci riferiremo agli elementi di K indifferentemente come *individui, votanti, elettori, giudici o giurati.* Supponiamo che questi individui abbiano il compito di prendere una decisione collettiva, ovvero di ordinare un insieme di alternative X $\in \Omega$ tale che $|\Omega| = n$. Questa decisione può essere presa con l'obbiettivo di essere quella che rappresenta maggiormente i componenti del gruppo, oppure con l'obbiettivo di essere la migliore possibile, oppure ancora con nessuno di questi due criteri. Il modo attraverso cui un gruppo di k individui prende una decisione collettiva è detto *sistema di voto.* Andremo presto ad approfondire questo concetto, ma prima dobbiamo formalizzare una serie di idee.

**Definizione 1** (Preferenza individuale)**.** Sia i un individuo. Sia $\Omega$ un insieme di alternative. La relazione di *preferenza individuale rispetto ad i* $\succeq_i$ è una relazione binaria sugli elementi di $\Omega$ che gode delle proprietà di riflessività e antisimmetria, ovvero:

- $\forall X \in \Omega,\ X \succeq_i X$
- $X, Y \in \Omega\, t.c.\, X \succeq_i Y \ \wedge\ Y \succeq_i X \Longrightarrow X = Y$

Se X $\succeq_i$ Y e X $\neq$ Y, scriveremo che X$\succ_i$Y e diremo che X *sconfigge* Y.

Adesso che abbiamo definito che cos'è una preferenza individuale, definiamo due importanti proprietà che richiederemo ad una buona preferenza individuale.

**Definizione 2** (Completezza)**.** Si dice che una relazione di preferenza individuale $\succeq_i$ è *completa* in un insieme di alternative $\Omega$ se

$$\forall X, Y \in \Omega,\ X \neq Y,\ X \succ_i Y \vee Y \succ_i X$$

**Definizione 3** (Transitività)**.** Si dice che una relazione di preferenza individuale è transitiva se

$$\forall X, Y, Z \in \Omega, X \succeq_i Y \wedge Y \succeq_i Z \Longrightarrow X \succeq_i Z$$

*Osservazione* 1. Nella nostra trattazione non contempleremo i pareggi. Al livello individuale, questo significa che riterremo sempre valida la proprietà di completezza. Per quanto riguarda la transitività, la riterremo sempre valida per le preferenze individuali (supporremo dunque gli individui di K *coerenti*), vedremo però che questa proprietà non sarà sempre valida nell'ambito delle preferenze collettive.

Esiste un altro modo, che useremo estensivamente, per definire in maniera compatta una relazione di preferenza individuale che sia completa e transitiva.

**Definizione 4** (Ranking)**.** Si dice *ranking r di ordine n* un vettore di n alternative tutte diverse tra loro, ovvero un elemento di $S_n$, l'insieme delle permutazioni di n elementi di $\Omega$. Il vettore r sarà dunque tale che $r_i \neq r_j \forall i \neq j$. Considereremo questo vettore come ordinato, interpretando $r_1$ come la *prima posizione* del ranking, e $r_n$ come *l'ultima posizione* del ranking. Diremo che un elemento X è *più in alto* rispetto ad Y in r se l'indice dell'entrata di r in cui compare l'alternativa X è minore dell'indice dell'entrata di r in cui compare Y.

Possiamo dunque pensare al ranking come ad una classifica completa di tutte le alternative. Mostriamo adesso che è vera la seguente.

**Proposizione 1.** *Un ranking induce un insieme di preferenze individuali completo e transitivo e viceversa.*

*Dimostrazione.* Un ranking induce una relazione di equivalenza completa e transitiva in modo banale. È sufficiente porre X $\succ_i$ Y ogni qual volta X è in una posizione del ranking più alta rispetto a Y. È completa in quanto il ranking include tutte le alternative (è un vettore di n alternative tutte diverse fra loro) ed è transitiva in quanto se X è in una posizione più alta di Y e Y è in una posizione più alta di Z, allora necessariamente X è in una posizione più alta di Z e dunque X$\succ_i$Z

Mostriamo adesso come una relazione di equivalenza completa e transitiva induce un ranking.

Anzitutto dobbiamo individuare l'alternativa che sconfigge il maggior numero di altre alternative, cerchiamo dunque l'alternativa X tale che $|\{Y \in \Omega \, t.c. \, X \succ_i Y\}|$ sia massima. Mostreremo dopo che questa X sconfigge ogni altra Y in $\Omega$. Stabilito questo fatto, possiamo mettere senza problemi X in cima al ranking, rimuoverla dall'insieme e ripetere il processo. Le preferenze sono ancora transitive e complete. Possiamo ripetere il procedimento ed individuare l'alternativa che sconfigge il maggior numero di altre alternative tra quelle rimanenti, e metterla al secondo posto nel ranking. Iterando questo procedimento n volte avremo costruito il ranking.

Ci resta soltanto da provare che se X sconfigge il maggior numero di alternative, allora X sconfigge tutte le alternative.

Supponiamo per assurdo che ciò non sia vero. Allora esisterebbe una certa alternativa W tale che W $\succ_i$ X. Per transitività, W sconfiggerebbe anche ogni Y sconfitta da X, dunque sconfiggerebbe più alternative di X, il che è assurdo. □

Diamo ora un'altra serie di utili definizioni.

**Definizione 5** (Profilo)**.** Si dice *profilo* $P_k$ l'insieme di tutti i ranking individuali di una popolazione di k individui. Ometteremo il pedice k per semplificare la notazione.

Identificheremo lo spazio dei profili di k ranking con n alternative con $S_n^k$ e di conseguenza ogni profilo con una matrice avente come righe i ranking di ogni individuo. Dunque P $\in S_n^k$ è una matrice avente come entrata $p_{i,j}$ l'elemento in j-esima posizione nel ranking individuale dell'i-esimo individuo.

**Definizione 6** (Sistema di Voto)**.** Si dice sistema di voto un'applicazione

$$\phi \,:\, S_n^k \longrightarrow S_n$$

$$P \longmapsto \phi(P)$$

$\phi$(P) è detto *ranking collettivo* o *ranking sociale*. Il ranking collettivo induce una relazione di preferenza collettiva o sociale.

## 2.2 Patologie dei sistemi di voto

In questa sezione analizzeremo due delle più popolari classi di sistemi di voto: il sistema maggioritario ed i sistemi posizionali. Nel caso in cui l'universo delle alternative $\Omega$ abbia cardinalità 2 i due sistemi coincidono. In questo caso, il sistema di voto naturale è il seguente:

$$\phi_M^2 \,:\, S_2^k \longrightarrow S_2$$

$$P \longmapsto \phi_M^2(P)$$

Dove

1. $\phi_M^2(P)$ è il ranking indotto da X≻Y se $|\{i \,:\, X \succ_i Y\}| > |\{j \,:\, Y \succeq_j X\}|$
2. $\phi_M^2(P)$ è il ranking indotto da Y≻X se $|\{i \,:\, X \succeq_i Y\}| < |\{j \,:\, Y \succeq_j X\}|$

Non ci soffermeremo ulteriormente sul caso binario, che non desta particolare interesse. D'ora in avanti supporremo dunque che $|\Omega| \geq 3$.

### 2.2.1 Il Sistema Maggioritario

Il sistema maggioritario risulta essere il sistema di voto naturale nel caso binario. Con l'espandersi dell'universo delle alternative questo sistema manifesta una serie di patologie preoccupanti. Mostriamo adesso, attraverso degli esempi, due di queste patologie: il paradosso di Condorcet e la calendarizzazione strategica .

**Il Paradosso di Condorcet** Vogliamo estendere le possibilità del sistema maggioritario nel caso di tre o più alternative. L'approccio più naturale sarebbe quello di creare un insieme di preferenze di gruppo e poi tradurlo in un ranking collettivo. Per creare le preferenze di gruppo, ci basterà prendere una coppia di alternative X,Y $\in \Omega$, X$\neq$ Y, e porre X≻Y qualora $|\{i \,|\, X \succ_i Y\}| > |\{i \,|\, Y \succ_i X\}|$, e Y≻X in caso contrario. Questa operazione è sempre ben definita in quanto le preferenze personali sono complete ed il numero di votanti è sempre supposto dispari. Volendo ammettere che k possa essere pari, è sufficiente trovare un meccanismo di *tie-breaking*, ovvero un criterio per risolvere i pareggi a favore di una delle due alternative. Così facendo, per ogni coppia di alternative X e Y diverse tra loro avremo X≻Y oppure Y≻X. La nostra relazione di preferenza collettiva è dunque completa. Nonostante ciò, la relazione di preferenza collettiva così costruita potrebbe non essere transitiva. Mostriamo questo fenomeno con un esempio.

*Esempio* 1. Supponiamo di avere tre conviventi, A, B e C, che devono comprare un nuovo televisore per la loro casa. Dopo una scrematura iniziale, i tre hanno individuato tre modelli tra i quali decidere.

| Modello | Costo | Risoluzione | Pollici |
|---|---|---|---|
| X | 700 | 4k | 45' |
| Y | 300 | Full HD | 35' |
| Z | 500 | HD | 50' |

A ha come priorità di spendere il meno possibile. B vuole la massima risoluzione. C vuole che il televisore sia il più grande possibile. Inizialmente, facciamo scegliere i tre conviventi tra il modello X e il modello Y. A sceglierà senza dubbio Y, ma B e C sceglieranno X. Nella nostra preferenza collettiva avremo dunque X$\succ$Y. Dopo, facciamo scegliere il gruppo tra Y e Z. A e B voteranno per Y, che ha una risoluzione migliore e costa meno, mentre C voterà per Z, che è più grande. In definitiva avremo Y$\succ$Z. Infine, facciamo scegliere A, B e C tra Z e X. A sceglierà Z, così come C, mentre B sceglierà X. Quindi avremo Z$\succ$X. Ricapitolando, il gruppo ha creato, attraverso il voto maggioritario, una relazione di preferenza tale che

$$X \succ Y \succ Z \succ X$$

Il che significa che la relazione di preferenza collettiva così ottenuta non è transitiva. Questa è una manifestazione del paradosso di Condorcet.

Avendo messo in evidenza l'inquietante fenomeno del paradosso di Condorcet, possiamo adesso dare una definizione per il sistema di voto maggioritario che valga anche nel caso in cui $|\Omega| \geq 3$. Questa definizione sarà però inevitabilmente vincolata alla supposizione che la relazione di preferenza collettiva generata attraverso gli "scontri individuali" goda della proprietà transitiva. Chiaramente questa proprietà è sempre soddisfatta nel caso binario, ma in generale non lo è nel caso in cui $n \geq 3$. Forniremo, nel capitolo 4, una condizione sufficiente da imporre sulle singole preferenze personali affinché la preferenza collettiva così generata sia transitiva.

**Definizione 7** (Sistema maggioritario)**.** Sia $|\Omega| \geq 2$. Sia $\succeq$ la relazione di preferenza collettiva generata applicando $\phi^2_M$ ad ogni coppia di alternative in $\Omega$. Sia $\succeq$ transitiva. Allora si definisce il sistema maggioritario:

$$\begin{aligned} \phi^n_M \,:\, S^k_n &\longrightarrow S_n \\ P &\longmapsto \phi^n_M(P) \end{aligned}$$

Dove $\phi^n_M(P)$ è il ranking indotto da $\succeq$.

**Calendarizzazione strategica** La calendarizzazione strategica è un'altra patologia legata al paradosso di Condorcet, che mostreremo attraverso un esempio. Il fenomeno della calendarizzazione strategica ci aiuta a capire perché il sistema maggioritario non sia ben definito quando la relazione generata non è transitiva: il risultato prodotto dipende dall'ordine degli scontri.

*Esempio* 2. Supponiamo di essere arrivati alla semifinale dei mondiali con quattro squadre rimaste: Carta, Forbice, Sasso e San Marino. Supponiamo che Carta batta sempre Sasso e che Sasso batta sempre Forbice, ma anche che Forbice batta sempre Carta. Supponiamo inoltre che San Marino perda contro tutti. Se volessimo far vincere i mondiali a Carta ci basterebbe far scontrare in semifinale Sasso e Forbice da un lato, Carta e San Marino dall'altro. Così avremmo in finale Sasso contro Carta, e Carta vincerebbe il mondiale. Se invece volessimo far vincere Forbice, potremmo far scontrare Forbice e San Marino da un lato e Carta e Sasso dall'altro, così in finale avremmo Forbice contro Carta e Forbice vincerebbe il mondiale. In maniera analoga si può strutturare il torneo in modo da far vincere Sasso.

Questo fenomeno è una conseguenza del paradosso di Condorcet. Poiché la relazione presa in considerazione non è transitiva, bensì ciclica ($Carta \succ Sasso \succ Forbice \succ Carta$), è possibile far vincere il torneo a una delle tre squadre a piacimento semplicemente gestendo il calendario degli incontri in maniera opportuna.

### 2.2.2 I Sistemi Posizionali

Abbandoniamo il sistema maggioritario per soffermarci su una diversa classe di sistemi di voto: i sistemi di voto posizionali. In questi sistemi, ogni alternativa riceve un certo *peso* basato sulla posizione che ottiene nei ranking individuali. L'esempio paradigmatico di questo tipo di sistemi è il Metodo Borda.

**Il Metodo Borda** Sia n il numero di alternative in gioco, ossia la cardinalità di $\Omega$. Sia K=$\{1, \ldots, k\}$ l'insieme dei votanti. Sia $r_i$ il ranking dell'i-esimo votante (d'ora in avanti non useremo più la notazione col pedice per riferirci alle posizioni nel singolo ranking). Assegniamo n punti all'alternativa che sta al primo posto di $r_i$, n-1 alla seconda, n-2 alla terza e così via fino a darne 1 all'ultima. Calcoliamo poi tutti i punti che ciascuna alternativa ottiene sommando tutti i punti assegnati a quella alternativa in ciascun ranking individuale. Ordiniamo infine le alternative in ordine decrescente di punteggio per ottenere un ranking collettivo. Ricordiamo che abbiamo identificato l'universo dei profili composti da k ranking con $S_n^k$, ovvero con il sottoinsieme dell'insieme delle matrici ad entrate in $\Omega$ dove le righe della matrice sono ranking individuali. Ci servirà anche supporre che l'universo delle alternative sia ordinato, per cui possiamo far corrispondere biunivocamente ad ogni alternativa X un indice j. Avremo dunque $\Omega = \{X_1, \ldots, X_n\}$. Possiamo dunque vedere il metodo Borda come la composizione delle due applicazioni seguenti:

$$\psi \, : \, S_n^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$$
$$P \longmapsto \psi(P) = (\alpha_1, ..., \alpha_k)$$

Dove $\alpha_j = \sum_{m=1}^{n} \{n + 1 - i \,|\, p_{m,i} = X_j\}$. Questa applicazione va composta con la seguente.

$$\theta \, : \, \mathbb{R}^k \longrightarrow S_n$$
$$x = (\alpha_1, ..., \alpha_k) \longmapsto \theta(x) = (\omega_1, ..., \omega_n)$$

Dove $\omega_i$ corrisponde all'alternativa $X_j$ tale che $|\{h \,|\alpha_h \geq \alpha_j\}| = i$. Notiamo che è possibile che vi siano dei pareggi nel ranking finale: è sufficiente anche questa volta stabilire un criterio di tie-breaking.

Adesso che abbiamo definito il metodo Borda mostreremo una patologia di cui questo metodo, e con lui tutti i sistemi posizionali, soffre: il misreporting strategico.

**Il misreporting strategico** Il misreporting strategico consiste nel modificare la posizione di una o più alternative nel ranking individuale al fine di cambiare la posizione dell'alternativa preferita dall'individuo all'interno del ranking collettivo. Entra dunque in gioco un concetto che approfondiremo nelle sezioni successive: ammettiamo la possibilità che i votanti possano non essere *sinceri*, dove per sincerità intendiamo la proprietà che possiede un votante di esprimere un voto coincidente con la propria preferenza personale. Mostriamo adesso questo fenomeno con un esempio.

*Esempio* 3. Cinque giudici qualificati, A, B, C, D ed E stanno stilando, per una rivista, la classifica dei migliori cantautori italiani di tutti i tempi. Dopo una scrematura iniziale, si è arrivati a selezionare tre alternative: Fabrizio De Andrè, Lucio Dalla e Luigi Tenco. Il compito dei giudici è quello di produrre una classifica di queste tre alternative. Supponiamo inizialmente che i tre giudici votino in maniera sincera. I loro voti sono i seguenti:

| Giudice | Primo | Secondo | Terzo |
|---|---|---|---|
| A | De Andrè | Dalla | Tenco |
| B | De Andrè | Dalla | Tenco |
| C | De Andrè | Dalla | Tenco |
| D | Dalla | Tenco | De Andrè |
| E | Dalla | Tenco | De Andrè |

Questa tabella si traduce, in termini di metodo Borda, nei seguenti punteggi

| Giudice | De Andrè | Dalla | Tenco |
|---|---|---|---|
| A | 3 | 2 | 1 |
| B | 3 | 2 | 1 |
| C | 3 | 2 | 1 |
| D | 1 | 3 | 2 |
| E | 1 | 3 | 2 |
| Tot | 11 | 12 | 7 |

In questo modo, avendo i giudici votato sinceramente, avremmo Dalla in prima posizione, De Andrè al secondo posto e Tenco al terzo. Rimuoviamo adesso l'ipotesi che i giudici votino sinceramente. Possiamo ipotizzare che A e B siano fan sfegatati di Fabrizio De Andrè, e vogliano assolutamente farlo vincere. Per svantaggiare Dalla, avversario più temuto, decidono allora di modificare strategicamente le loro preferenze in questo modo.

| Giudice | Primo | Secondo | Terzo |
|---|---|---|---|
| A | De Andrè | Tenco | Dalla |
| B | De Andrè | Tenco | Dalla |
| C | De Andrè | Dalla | Tenco |
| D | Dalla | Tenco | De Andrè |
| E | Dalla | Tenco | De Andrè |

E la classifica cambia dunque nel modo seguente.

| Giudice | De Andrè | Dalla | Tenco |
|---|---|---|---|
| A | 3 | 1 | 2 |
| B | 3 | 1 | 2 |
| C | 3 | 2 | 1 |
| D | 1 | 3 | 2 |
| E | 1 | 3 | 2 |
| Tot | 11 | 10 | 9 |

Ma in questa nuova classifica il vincitore è Fabrizio De Andrè.

Abbiamo dunque mostrato come, a prescindere dal sistema di voto che si intenda usare, emergano comunque delle patologie. La prossima sezione ci fornirà un risultato dal quale impareremo che non è possibile, senza ulteriori ipotesi, sfuggire a queste patologie.

# Capitolo 3

# I teoremi di Arrow e di Gibbard-Satterthwhite

In questo capitolo, andremo ad enunciare e dimostrare il risultato centrale della teoria delle scelte collettive: Il Teorema Di Arrow. Successivamente, andremo ad esaminare un risultato strettamente collegato a quest'ultimo: il Teorema di Gibbard Satterthwhite, che lega la teoria delle scelte collettive alla teoria dei giochi attraverso il concetto di strategia. Gli argomenti trattati in questa sezione sono ripresi dai testi [10], [5], [4] e [3], presenti in bibliografia.

## 3.1 Il Teorema di Arrow

Per enunciare questo risultato dovremo introdurre le proprietà di Paretianità e di Indipendenza dalle Alternative Irrilevanti, due buone proprietà di cui vorremmo possa godere un sistema di voto che garantisca una rappresentanza adeguata a tutti i votanti.

**Definizione 8.** (Paretiano) Un sistema di voto $\phi$ si dice *Paretiano* se

$$\forall P \in S_n^k \, t.c. \, X \succ_i Y \, \forall i = 1, ..., k \Longrightarrow X \succ Y$$

**Definizione 9.** (Restrizione) Sia r un ranking (individuale o collettivo) e sia $A$ un sottoinsieme di $\Omega$. Si dice *restrizione di r ad A* e si indica con $r_{|A} \in S_{|A|}$ il ranking ottenuto da r rimuovendo tutte le posizioni occupate da alternative non appartenenti ad A.

Possiamo estendere il concetto di restrizione anche ai profili. Si dice *restrizione di P ad A* e si indica con $P_{|A}$ il profilo ottenuto restringendo ad A ogni ranking di P.

**Definizione 10.** (Indipendenza dalle Alternative Irrilevanti) Un sistema di voto $\phi$ soddisfa la proprietà di *Indipendenza dalle Alternative Irrilevanti* o *IIA* se per ogni $A = \{X, Y\}$, con X$\neq$ Y si ha che:

$$\forall P, Q \in S_n^k \, t.c. P_{|A} = Q_{|A} \Longrightarrow \phi(P)_{|A} = \phi(Q)_{|A}$$

**Definizione 11.** (Dittatura da parte di j) Si dice *Dittatura da parte di j* un sistema di voto $\psi_j$ così definito

$$\psi_j \, : \, S_n^k \longrightarrow S_n$$

$$P \longmapsto r_j$$

Dove con $r_j$ si intende il ranking dell'individuo j.

Dunque la dittatura è un sistema di voto che opera su un profilo imponendo il ranking collettivo uguale al ranking individuale di un certo individuo j. L'individuo j è detto *dittatore*. Possiamo notare come la dittatura da parte di j sia un sistema che gode di Paretianità e IIA, difatti:

1. Soddisfa la Paretianità perché se per tutti i votanti X sconfigge Y, allora X sconfigge Y anche per j, e dunque X sconfigge Y nel ranking collettivo

2. Siano P e Q due profili uguali quando ristretti ad A. Allora $r_j$ in P è uguale ad $r_j$ in Q quando ristretti ad A. Dunque in particolare avremo $\psi_j(P)_{|A} = \psi_j(Q)_{|A}$

Abbiamo dunque appena mostrato come la dittatura da parte di un certo individuo j sia un sistema in grado si soddisfare Paretianità e IIA. Il teorema di Arrow, risultato centrale della teoria della scelta sociale, ci dice che è anche l'unico sistema con questa proprietà. Diamo adesso due formulazioni, del tutto equivalenti, del Teorema di Arrow.

**Teorema 1** (di Arrow). *Sia $K = 1, \dots, k$ l'insieme dei votanti. Sia $\Omega$ l'insieme delle alternative. Sia $|\Omega| \geq 3$. Allora un sistema di voto $\phi$ soddisfa paretianità e IIA se e solo se $\phi = \psi_j$ per qualche $j \in K$.*

La seconda formulazione, del tutto equivalente dal punto di vista logico, è più famosa, in quanto svariati divulgatori nel corso degli anni l'hanno portata come prova della "Impossibilità della democrazia".

**Teorema 2** (di Impossibilità di Arrow). *Sia $K = 1, \dots, k$ l'insieme dei votanti. Sia $\Omega$ l'insieme delle alternative. Sia $|\Omega| \geq 3$. Allora non esiste alcun sistema di voto $\phi$ che goda di Paretianità, IIA e $\phi \neq \psi_j \, \forall j \in K$.*

*Dimostrazione.* Per provare questo teorema, prenderemo un generico sistema di voto $\phi$ tale che soddisfi Paretianità e IIA, e mostreremo che esiste un individuo j tale che $\phi$=$\psi_j$ Questa dimostrazione consterà dunque di tre step.

1. Anzitutto mostreremo come il fatto che un sistema di voto sia Paretiano e soddisfi IIA implichi il fatto che ogni *alternativa polarizzante* sia messa al primo o all'ultimo posto del ranking collettivo.

2. Identificheremo poi un potenziale dittatore j analizzando una particolare sucessione di profili.

3. Mostreremo che effettivamente j è il dittatore.

**Step 1** Sia P $\in S_n^k$ un profilo, chiameremo *alternativa polarizzante* di P:

$$X \in \Omega \, t.c. \, \forall i = 1, ..., k \; p_{i,1} = X \vee p_{i,n} = X$$

Notiamo che in generale non è detto che un profilo contenga una alternativa polarizzante. Sia ora $\phi$ un sistema di voto che soddisfi Paretianità e IIA. Sia poi P $\in$ $S_n^k$ un profilo. Sia X una alternativa polarizzante di P. Supponiamo per assurdo che $\phi(P)_1 \neq X$ e $\phi(P)_n \neq X$. Dunque esistono Y,Z $\in \Omega$ tali che Y$\succeq$X$\succeq$Z in $\phi(P)$. Adesso, per ogni $r_i$ in P tale che Y$\succeq$Z in $r_i$ spostiamo Z nella posizione immediatamente più in alto di Y in $r_i$. Questo produce un nuovo profilo P' in questo modo

$$\begin{pmatrix} X & \dots & Y & \dots & Z & \dots \\ X & \dots & Z & \dots & Y & \dots \\ \dots & Y & \dots & Z & \dots & X \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} X & \dots & Z & Y & \dots & \dots \\ X & \dots & Z & \dots & Y & \dots \\ \dots & Z & Y & \dots & \dots & X \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Dove la prima matrice rappresenta P e la seconda rappresenta P'. Passando da P a P', essendo X un'alternativa polarizzante, non cambia l'ordine relativo di X e Z o quello di Y e X nel ranking collettivo. Per Paretianità inoltre, mentre prima avevamo Y$\succ$Z in $\phi(P')$ avremo Z$\succ$Y. Allora in $\phi(P')$ ho ancora Y$\succ$X e X$\succ$Z per IIA, ma Z$\succ$Y per Paretianità. Dunque ho costruito un ranking collettivo $\phi(P')$ che induce una relazione di preferenza non transitiva, il che contraddirebbe la Proposizione 1. Abbiamo dunque dimostrato che, essendo valide Paretianità e IIA, X deve essere prima o ultima nel ranking collettivo.

**Step 2** Adesso creeremo una successione di profili $P_m$ tale che $P_m$ differisca da $P_{m+1}$ solo per il ranking individuale $r_m$, e studieremo come si comporta $\phi(P_m)$. Definiamo la successione $P_m$ nel seguente modo:

1. $P_0$ è un qualunque profilo avente $P_{i,n} = X$ per ogni i=1,... k. In altre parole $P_0$ è un profilo di ranking individuali aventi tutti X all'ultimo posto.

2. $P_{n+1}$ è il profilo tale che creato a partire da $P_n$ portando X al primo posto del ranking (n+1)-simo e traslando di conseguenza di una posizione tutte le altre alternative.

Per far sì che sia ben definita, fermeremo la successione per m=k. Per Paretianità, certamente avremo che $X = \phi(P_0)_n$ e $X = \phi(P_k)_1$. Dunque esiste j tale che $X = \phi(P_m)_n$ per $m < j$ e $X = \phi(P_m)_1$ per $m \geq j$ (per quanto mostrato nello step 1 ed essendo X una alternativa polarizzante per ogni $P_m$). Allora j è il nostro candidato dittatore.

**Step 3** Per mostrare che j è un dittatore mostreremo che per ogni profilo Q ed ogni coppia di alternative Y,Z$\neq$X si ha che $\phi(Q)_{|\{Y,Z\}} = r_{j|\{Y,Z\}}$. Dopo aver provato ciò, proveremo anche che questo fatto vale anche a patto di scegliere una coppia di alternative tali che una delle due coincida con X. Dunque avremo che l'ordinamento di ogni coppia nel ranking collettivo è determinato da j, e dunque che il ranking di j induce il ranking collettivo. Sia dunque Q $\in S_n^k$ e Y,Z$\neq$X tali che Y$\succ_j$Z in $r_j$. Creiamo a partire da Q un profilo Q' nel seguente modo. Prendiamo Q e spostiamo X nella prima posizione dei ranking $r_1 \dots r_j$, poi spostiamo X nell'ultima posizione dei ranking $r_{j+1} \dots r_k$, infine spostiamo Y al primo posto in $r_j$ (spostando dunque X al secondo posto in $r_j$)).

Adesso facciamo le seguenti osservazioni:

- Sappiamo che X è primo in $\phi(P_j)$. Poiché $P_{j|\{X,Z\}} = Q'_{|\{X,Z\}}$ e X$\succ$Z in $\phi(P_j)$, allora per IIA X$\succ$Z in $\phi(Q')$.

- Sappiamo che X è ultima in $\phi(P_{j-1})$, e dunque Y$\succ$X in $\phi(P_{j-1})$. Poiché $P_{j-1\,|\{X,Y\}} = Q'_{|\{X,Y\}}$ allora per IIA Y$\succ$X in $\phi(Q')$

- Per transitività, necessariamente Y≻Z in $\phi(Q')$
- Poiché $Q_{|\{Y,Z\}} = Q'_{|\{Y,Z\}}$ e Y≻Z in $\phi(Q')$ allora per IIA Y≻Z in $\phi(Q)$
- Poiché Q è un profilo qualunque e Y e Z sono due alternative diverse da X soggette alla sola condizione che Y$\succ_j$Z, segue che l'ordinamento di Y e Z nel ranking colletivo $\phi(Q)$ coincide con l'ordinamento di Y e Z nel ranking di j. Possiamo dire che $r_{j|\{Y,Z\}} = \phi(Q)_{|\{Y,Z\}}$ per ogni coppia di alternative Y,Z diverse da X. Allora j è un dittatore su tutte le coppie che non includono X.

Ci resta soltanto da dimostrare che quanto mostrato sopra vale anche a patto di ammettere che una delle due alternative possa coincidere con X. Notiamo anzitutto che possiamo ripetere l'argomentazione rispetto a qualunque alternativa W≠X e concludere che esiste un certo individuo h che è un dittatore su tutte le coppie che non includono W. Poniamo per assurdo che h≠j. Consideriamo X e un'alternativa Y≠W. Sappiamo che i profili $P_j$ e $P_{j-1}$ differiscono soltanto per il ranking individuale di j, e che in $\phi(P_{j-1})$ X è ultimo, mentre in $\phi(P_j)$ X è primo. In uno di questi due ranking collettivi, l'ordinamento reciproco di X e Y deve essere diverso da quello di X e Y nel ranking individuale di h, il che contraddice il fatto che h sia il dittatore sulla coppia X,Y. Allora necessariamente h=j è il dittatore su tutte le coppie e quindi $\phi = \psi_j$ come volevasi dimostrare.

□

## 3.2 Il Teorema di Gibbard Satterthwhite

Adesso ci apprestiamo ad enunciare un risultato strettamete collegato al teorema di Arrow, tanto da esserne quasi considerabile un corollario: il Teorema di Gibbard-Satterthwhite. Per enunciare questo teorema, dovremo iniziare ad ammettere la possibilità che gli individui possano votare in modo non sincero al fine di perseguire una strategia. Diamo adesso delle definizioni.

**Definizione 12.** (Manipolabilità) Sia $\phi$ un sistema di voto e P $\in S_n^k$ un profilo. Sia $r_i$ il ranking individuale (sincero) dell'individuo i. Sia P' il profilo generato da P modificando $r_i$ in $r_i'$. Siano poi X,Y $\in \Omega$ tali che X$\succ_i$Y. $\phi$ si dice *manipolabile* rispetto a P se:

$$\exists i \in \{1 \dots k\}\, t.c.\, Y \succeq X\, in\, \phi(P) \wedge\ X \succeq Y\, in\, \phi(P')$$

In altre parole, un sistema di voto è manipolabile se esiste un individuo che componendo il suo ranking in modo non sincero può influenzare il ranking collettivo facendo sì che l'alternativa X che lui preferisce ad Y arrivi in una posizione più alta di Y nel ranking collettivo, cosa che non accadrebbe se componesse il suo ranking in maniera sincera. Manipolabile è dunque un sistema come il metodo Borda e il fenomeno del misreporting strategico è una manifestazione della manipolabilità.

**Definizione 13.** (A prova di strategia) Sia $\phi$ un sistema di voto. Diciamo che $\phi$ è *a prova di strategia* se non esiste un profilo P $\in S_n^k$ che renda $\phi$ manipolabile.

**Definizione 14.** (Suriettività) Un sistema di voto $\phi$ si dice *suriettivo* se per ogni ranking di n alternative r $\in S_n$ esiste un profilo P $\in S_n^k$ tale che $\phi(P) = r$

**Teorema 3.** *(Gibbard-Satterthwhite) Sia $\phi$ un sistema di voto suriettivo. Se $\phi$ è a prova di strategia, allora $\phi = \psi_j$ per qualche $j \in K$.*

*Dimostrazione.* La dimostrazione di questo teorema consta di due step

1. Proviamo che:
$$\phi\, a\, prova\, di\, strategia \implies \phi\, Paretiano$$

2. Proviamo che
$$\phi\, a\, prova\, di\, strategia \implies \phi\, soddisfa\, IIA$$

Avendo dimostrato i primi due step, ci basterà invocare il Teorema di Arrow.

**Step 1** Supponiamo per assurdo che $\phi$ non sia Paretiano. Allora esiste un profilo $P = (r_1, \ldots, r_k)$ in $S_n^k$ e due alternative X,Y $\in \Omega$ tali che X$\succ_i$Y per ogni i=1…k ma Y$\succ$X in $\phi(P)$. Poiché $\phi$ è suriettiva, esiste un profilo $P' = (r'_1, \ldots, r'_k)$ tale che X$\succ$Y in $\phi(P')$. Consideriamo adesso la successione di ranking collettivi $\{\phi(P_m)\}_{m=1}^k$ indotta dalla successione di ranking $P_m$ così definita:

- $P_0 = P = (r_1, \ldots, r_k)$
- $P_{m+1} = (r'_1, \ldots, r'_m, r'_{m+1}, r_{m+2}, \ldots, r_k)$

Chiaramente $P_k = P'$. Possiamo affermare che esiste

$$m^* = min\{m \,|\, X \succ Y\, in\, \phi(P_m)\}$$

Allora consideriamo il profilo $P_{m^*}$: l'individuo $m^*$ vorrà riportare il ranking $r'_{m^*}$ invece di $r_{m^*}$, perché quest'ultimo induce il profilo $P_{m^*-1}$ nel quale ancora Y$\succ$X. All'individuo $m^*$ conviene quindi giocare di strategia per ottenere il risultato sperato nel ranking collettivo. Dunque $\phi$ non è a prova di strategia, il che sarebbe assurdo. Questo dimostra il primo step.

**Step 2** Poniamo per assurdo che $\phi$ non soddisfi IIA. Allora esistono due profili P e P' e due alternative X e Y in $\Omega$ tali che

- P e P' hanno lo stesso ordinamento relativo tra X e Y in ogni ranking, supponiamo dunque X$\succ_i$Y e X$\succ'_i$Y per ogni i=1,… k
- X$\succ$ Y in $\phi(P)$ e Y$\succ$X in $\phi(P')$

Ma allora costruendo la stessa successione costruita nello step 1 riusciamo ad individuare nuovamente un individuo $m^*$ che può trarre vantaggio dal comporre il proprio ranking in maniera non sincera, il che contraddice il fatto che $\phi$ sia a prova di strategia.

Dunque abbiamo provato che il fatto che $\phi$ sia a prova di strategia, a patto che sia suriettivo, equivale alle condizioni di Paretianità e Indipendenza dalle Alternative Irrilevanti. Allora per il Teorema di Arrow $\phi$ è necessariamente una dittatura da parte di un qualche individuo j, come volevasi dimostrare. □

# Capitolo 4

# Teoria di Condorcet

## 4.1 Il Teorema dell'Elettore Mediano

Per gli argomenti trattati in questa sezione, ci rifaremo ai testi [7] e [4], presenti in bibliografia.

Il Teorema di Arrow segna un punto d'arresto per lo sviluppo della teoria delle scelte sociali. Ciononostante, trovandoci davanti ad un risultato di impossibilità, possiamo continuare a sviluppare la teoria a patto di fare delle ipotesi più stringenti, che ci permetteranno di aggirare alcune delle patologie intrinseche ai sistemi di voto che abbiamo esaminato nelle sezioni precedenti. Riprenderemo a considerare adesso un sistema di voto maggioritario come definito nel capitolo 2. L'universo delle alternative avrà ancora cardinalità maggiore di due e, di volta in volta, selezioneremo due alternative e chiederemo al gruppo di votanti di produrre una relazione di preferenza collettiva. L'ipotesi che formuleremo adesso è quella che i ranking degli elettori e dunque le loro preferenze siano a massimo unico, e conseguentemente dovremo anche ipotizzare che le alternative posseggano in qualche modo un ordinamento. Questa è un ipotesi abbastanza ragionevole, che si inserisce bene in diverse situazioni da modellizzare: possono essere considerate come ordinate le preferenze politiche degli elettori in una democrazia (da destra verso sinistra) così come le preferenze di un consumatore che deve acquistare un nuovo modello di telefono cellulare (dal meno costoso al più costoso, dal meno performante al più performante).

*Osservazione* 2. Da qui in avanti supporremo che l'universo delle alternative $\Omega$ abbia un ordinamento. Per evidenziare questo fatto riprederemo la notazione che ci permette di etichettare le alternative con dei pedici, dunque avremo $\Omega$=$\{X_1, \ldots, X_n\}$. Inoltre supporremo che n sia dispari.

**Definizione 15.** (Relazione d'ordine lineare) Si dice *relazione d'ordine lineare* $\geq$ una relazione binaria su un insieme $\Omega$ che sia riflessiva, transitiva, antisimmetrica e totale.

Noi imporremo, nell'universo delle alternative $\Omega$, la seguente relazione d'ordine lineare:

$$X_i \geq X_j \iff i \geq j$$

Inoltre, se $X_i \geq X_j \wedge X_i \neq X_j$, scriveremo $X_i > X_j$

**Definizione 16.** (Preferenze a massimo unico) Una relazione di preferenza personale $\succeq_i$ è *a massimo unico* rispetto alla relazione d'ordine lineare $\geq$ imposta su $\Omega$ se esiste al più una alternativa $X_{n_0}$ tale che

$$X_{n_0} \succ_i X_{n_0+1}, \wedge X_{n_0} \succ_i X_{n_0-1}$$

**Definizione 17.** (Elettore Mediano) Sia $\Omega$=$\{X_1, \ldots, X_n\}$ l'universo delle alternative dotato della relazione d'ordine lineare $\geq$. Sia $X^i$ l'alternativa preferita dell'i-esimo votante. Si dice *elettore mediano* h $\in \{1, \ldots, k\}$ per il profilo P un elettore tale che

$$|\{i|X^i \geq X^h\}| \geq n/2 \wedge |\{i|X^h \geq X^i\}| \geq n/2$$

**Definizione 18.** (Vincitore di Condorcet) Sia $\Omega$=$\{X_1, \ldots, X_n\}$. Sia $\phi^n_M$ il sistema di voto maggioritario. Sia P $\in S^k_n$. $X_i \in \Omega$ si dice *vincitore di Condorcet* se $X_i \succ X_m$ in $\phi^n_M(P)$ per ogni m$\neq$i

*Osservazione* 3. Non è detto che, in presenza di un vincitore di Condorcet, $\phi^n_M(P)$ sia ben definito, in quanto potrebbero ancora esistere delle ciclicità nella relazione di preferenza collettiva creata sottoponendo le alternative agli "scontri individuali" attraverso il sistema maggioritario. Ciononostante, è certo che il vincitore di Condorcet non faccia parte di questi cicli e che, qualora $\succeq$ sia transitiva, il vincitore di Condorcet occuperà la prima posizione del ranking indotto da $\succeq$. Stiamo dunque commettendo un abuso di notazione, indicando con $\phi^n_M(P)$ l'insieme di preferenze individuali non necessariamente transitivo.

Possiamo adesso enunciare il teorema dell'elettore mediano.

**Teorema 4.** *(dell'Elettore Mediano) Sia $\Omega$=$\{X_1, \ldots, X_n\}$ un insieme dotato di una relazione d'ordine lineare. Sia poi $\{1, \ldots, k\}$ un insieme di votanti aventi preferenze $\succeq_i$ a massimo unico. Sia $\phi^n_M$ il sistema maggioritario. Allora l'alternativa preferita dall'elettore mediano $X^h$ è un vincitore di Condorcet per ogni $P \in S^k_n$.*

*Dimostrazione.* Sia $X_m \in \Omega$, $X_m \neq X^h$. Supponiamo $X^h < X_m$ (analogamente per $X^h > X_m$). Dobbiamo mostrare che $X^h \succ X_m$, ovvero che, dato che stiamo adottando il sistema maggioritario:

$$|\{i \,|\, X^h \succ_i X_m\}| > |\{i \,|\, X_m \succ_i X^h\}|$$

Sia $S \subset \{1, \ldots, k\}$ l'insieme dei votanti che hanno il loro elemento preferito $X^i$ (massimo) tale che $X^i \leq X^h$. Allora per ogni i $\in$ S si ha che $X^i < X^h < X_m \Longrightarrow X^i \succ_i X^h \succ_i X_m \Longrightarrow X^h \succ_i X_m$. Ma per definizione di elettore mediano, si ha che $\#\{i \,|\, X^i < X^h\} \geq n/2$, il che implica che $\#\{i \,|\, X^h \succ_i X_m\} > n/2$. Dunque $X^h \succ X_m$ per ogni m$\neq$h. $X^h$ è un vincitore di Condorcet come volevasi dimostrare. $\square$

Esaminiamo adesso un esempio per spiegare intuitivamente il significato di questo teorema.

*Esempio* 4. Nella piccolissima repubblica di Poli si stanno tenendo le elezioni per eleggere il presidente. In tutto abbiamo cinque elettori (A,B,C,D ed E) e due candidati, uno di centro e uno di estrema destra. Supponiamo che l'universo delle alternative sia $\Omega = \{ES, CS, CC, CD, ED\}$, dove ES=Estrema sinistra, CC=Centro-sinistra, CC=Centro, CD=Centro-destra, ED=Estrema destra e che queste alternative siano ordinate nel seguente modo: $ES < CS < CC < CD < ED$. Supponiamo che le preferenze dell'elettorato siano così distribuite:

| Elettore | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| A | CS | ES | CC | CD | ED |
| B | ED | CD | CC | CS | ES |
| C | CC | CD | CS | ED | ES |
| D | CD | ED | CC | CS | ES |
| E | ES | CS | CC | CD | ED |

Possiamo notare come le preferenze siano tutte a massimo unico. Il giorno delle elezioni, se tutti gli elettori votassero sinceramente secondo le loro preferenze, dovendo essere costretti a scegliere tra i due candidati sopra elencati, avremmo:

| Elettore | Voto |
|---|---|
| A | Centro |
| B | Estrema Destra |
| C | Centro |
| D | Estrema Destra |
| E | Centro |
| Vincitore | Centro |

Possiamo notare come l'alternativa prediletta dall'elettore mediano (in questo caso C) sia effettivamente il vincitore di queste elezioni.

## 4.2 Il Teorema della Giuria di Condorcet

All'interno di questa sezione ci rifaremo ai testi [6] e [3], presenti in bibliografia.

Fino a questo momento abbiamo analizzato sistemi di voto nei quali i votanti avevano come unica indicazione quella di esprimere la propria preferenza. Essi dunque componevano il loro ranking (in maniera sincera o non sincera) con l'obiettivo di influenzare il ranking collettivo di modo che assomigliasse il più possibile al loro ranking individuale. In questa sezione le ipotesi cambiano. Questa volta i votanti sono chiamati ad esprimere una decisione collettiva che sia la *migliore* per il gruppo. Questo modello non funziona particolarmente bene per situazioni come una competizione elettorale o una classifica dei migliori cantautori, ma si adatta bene a modellizzare situazioni come il voto di una giuria. La supposizione implicita è che esista un ranking *migliore* e che l'obiettivo del processo di voto sia di scoprirlo. È dunque ragionevole supporre che i ranking individuali differiscano solo perché basati su *informazioni* diverse in possesso dei singoli votanti. Se tutti i votanti possedessero le stesse *informazioni* produrrebbero ranking individuali identici.

**Teorema 5.** *(della Giuria di Condorcet) Supponiamo di avere un gruppo di n dispari individui che deve scegliere tra due alternative: C (corretta, rappresentata da +1) ed E (errata, rappresentata da -1). Supponiamo che ogni individuo abbia una probabilità p di votare per C stocasticamente indipendente dalla probabilità di ogni altro individuo. Supponiamo che la decisione sia presa con sistema maggioritario. Siano $n_C$ ed $n_E$ rispettivamente il numero di voti per l'alternativa corretta e per quella errata. Sia $S_n$=$n_C - n_E$ Allora:*

- $lim_{n\to+\infty}P(S_n > 0) = 1$, *se* $p > 1/2$
- $lim_{n\to+\infty}P(S_n > 0) = 0$, *se* $p < 1/2$

*Dimostrazione.* Proviamo il teorema per $p > 1/2$. Sia $a = p - 1/2 > 0$. Il voto medio dell'individuo i sarà $EX_i = p - (1-p) = 2p - 1 = 2(p - 1/2) = 2a$. Abbiamo quindi una popolazione di individui i cui voti sono rappresentati da variabili aleatorie indipendenti identicamente distribuite di media 2a. Allora per la legge debole dei grandi numeri ho che, per ogni $\epsilon > 0$

$$lim_{n\to+\infty}P(|\frac{S_n}{n} - 2a| < \epsilon) = 1$$

Scelta $\epsilon = 2a$ ho che

$$1 = lim_{n\to+\infty}P(|\frac{S_n}{n} - 2a| < 2a) \leq lim_{n\to+\infty}P(-\frac{S_n}{n} + 2a < 2a) =$$

$$= lim_{n\to+\infty}P(\frac{S_n}{n} > 0) \leq lim_{n\to+\infty}P(S_n > 0)$$

Come volevasi dimostrare. La dimostrazione per $p < 1/2$ è analoga. □

Adesso vogliamo generalizzare il Teorema della Giuria di Condorcet ammettendo che la probabilità $p = p_n$ possa dipendere funzionalmente da n, pur mantenendo l'ipotesi che $p_n > 1/2$ per ogni n. Consideriamo i seguenti casi:

- $b_n = 1 - \frac{1}{n}$
- $c_n = p_0$, $p_0 \in (\frac{1}{2}\ 1)$
- $r_n = \frac{1}{2} + (\log n)^{-1}$
- $s_n = \frac{1}{2} + n^{-1/3}$
- $t_n = \frac{1}{2} + 2^{-n}$

Andremo a mostrare che la probabilità che n votanti indipendenti tali che ognuno abbia una probabilità $p_n$ di votare per l'alternativa corretta continua a tendere ad uno per n che tende ad infinito per tutte le successioni sopra riportate eccetto l'ultima. Anzitutto dobbiamo notare che per n sufficientemente grande le sequenze sopra riportate sono "annidate", ovvero $b_n > c_n > r_n > s_n > t_n$ per ogni $n > M$, preso M sufficientemente grande. Il seguente risultato ci permette di determinare quando la probabilità che una determinata decisione collettiva tenda ad uno attraverso il confronto, così da non dover necessariamente trattare ogni risultato separatamente.

**Proposizione 2.** *Sia $X_i^n$ il voto (+1 oppure -1) che l'i-esimo votante esprime nella situazione in cui vi sono n votanti in totale. Siano gli $X_i^n$ indipendenti (rispetto a i) e tali che $P(X_i^n = 1) = p_n$ e che $P(X_i^n = -1) = 1 - p_n$ per ogni i=1,...,n. Siano poi $Y_i^n$ il voto che l'i-esimo votante di un'altro processo esprime nella situazione in cui vi sono n votanti in totale. Siano gli $Y_i^n$ indipendenti (rispetto ad i) e tali che $P(Y_i^n = 1) = q_n$ e che $P(Y_i^n = 0) = 1 - q_n$. Siano $S_n^X = \sum_i^n X_i^n$ e $S_n^Y = \sum_i^n Y_i^n$. Allora, se $p_n > q_n > 1/2$ allora $P(S_n^X > 0) \geq P(S_n^Y > 0)$.*

*Dimostrazione.* (Proposizione) Sia n fissato. Per come sono definiti, si ha che $S_n^X \sim Bin(n, p_n)$ e $S_n^Y \sim Bin(n, q_n)$. Dunque abbiamo:

$$P(S_n^X > 0) = \sum_{n/2<k\leq n} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = 1 - \sum_{k\leq n/2} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$

$$P(S_n^Y > 0) = \sum_{n/2<k\leq n} \binom{n}{k} q_n^k (1-q_n)^{n-k} = 1 - \sum_{k\leq n/2} \binom{n}{k} q_n^k (1-q_n)^{n-k}$$

Adesso basta mostrare che le sommatorie nell'ultimo membro sono tali che quella in $p_n$ è più piccola di quella in $q_n$, e possiamo far ciò provando che per k≤n/2 la funzione $t^k(1-t)^{n-k}$ è decrescente per t>1/2 (essendo $p_n > q_n > 1/2$ per ipotesi otteniamo la tesi). Per far ciò passiamo al logaritmo (che non cambia la monotonia) ottenendo $k \log t + (n-k)\log(1-t)$, derivando otteniamo $\frac{k}{t} - \frac{n-k}{1-t}$ poiché $n-k \geq k$ (perché k è minore di n/2) e $1-t \leq t$ (perché sia $p_n$ che $q_n$ sono maggiori di n/2) la derivata è negativa, e ciò dimostra la tesi. □

Infine, enunciamo questa utile variante del celebre Teorema Limite Centrale, che ci permetterà di ragionare sulle successioni presentate in precedenza.

**Teorema 6.** *(Teorema Limite Centrale di Lyapunov) Siano $X_i, \ldots, X_n$ variabili aleatorie indipendenti (non necessariamente identicamente distribuite) tali che per qualche $\delta > 0$ ammettano momento di ordine $(2+\delta)$. Sia $\mu_i$ la media di $X_i$ e $\sigma_i^2$ la sua varianza. Sia poi*

$$s_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$$

*Allora, se per qualche $\delta > 0$ è soddisfatta la condizione di Lyapunov:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{i=1}^{n} E(|X_i - \mu_i|^{2+\delta}) = 0$$

*si ha che:*

$$\frac{1}{s_n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_i) \xrightarrow{n\to+\infty} N(0,\,1)$$

Dalle diverse successioni che abbiamo preso in esame precedentemente e dalle considerazioni fatte su esse, dobbiamo supporre che esista una soglia al di sotto della quale il Teorema della Giuria di Condorcet cessa d'essere valido. Per trovare questa soglia, richiamiamo il Teorema Limite Centrale, che in questo contesto ci dice che se $X_1, \ldots X_n$ sono indipendenti identicamente distribuite tali che assumono il valore 1 con probabilità $\frac{1}{2} + a$ e il valore -1 con probabilità $1 - p = 1/2 - a$ (esse hanno dunque media pari a $2a$ e varianza $(1-2a)(1+2a) = 4p(1-p)$), allora per il TLC si ha che la variabile aleatoria $Z_n = \sqrt{n}(S_n/n - 2a)$ ha una distribuzione normale con media 0 e varianza uguale a quella delle $X_i$ per n$\longrightarrow +\infty$. Quindi $Z_n \longrightarrow Z \sim N(0{,}4p(1-p))$.

Se $p_n = \frac{1}{2} + a_n$ con $a_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$, allora abbiamo che la somma delle varianze delle prime n variabili è $n(1+o(1))$. Applicando il Teorema Limite Centrale di Lyapunov vediamo che se $p_n$ converge, la tesi del Teorema Limite Centrale continua a valere, quindi otteniamo che $(S_n - \sum_{j=1}^{n} a_j)/\sqrt{n}$ converge a $N(0{,}1)$. A questo punto ci basta fare un'ultima considerazione sul valore atteso. Difatti avremo che:

$$\lim_{n\to+\infty} E[(S_n - \sum_{j=1}^{n} a_j)/\sqrt{n}] = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}(E[S_n] - \sum_{j=1}^{n} a_j) = 0$$

Ragioniamo sull'ultimo membro. Se la sommatoria delle $(\sum_{j=1}^{n} a_j)/\sqrt{n}$ divergesse, ciò significherebbe che necessariamente anche la media di $S_n$ dovrebbe divergere, il che implicherebbe che la probabilità che la giuria esprima un voto positivo tenderebbe a uno. È dunque sufficiente che quel termine diverga per n che tende ad infinito affinché si abbia il risultato desiderato. Ovvero è sufficiente che la successione delle $a_j$ sia definitivamente maggiore di $1/\sqrt{j}$. Quindi adesso, riprendendo le successioni $p_n, q_n, r_n, s_n, t_n$ precedentemente mostrate possiamo apprezzare come l'unica successione che non ci dia una certezza del fatto che il gruppo di votanti prenda una decisione corretta, ovvero $s_n$, sia anche l'unica delle cinque avente $a_n = 2^{-n}$ definitivamente minore di $1/\sqrt{n}$. Possiamo difatti apprezzare che la somma $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^n \sqrt{n}}$ non diverge, poiché è minore della serie geometrica con ragione un mezzo.

# Capitolo 5

# Voto non sincero per causa comune

In questo capitolo useremo alcuni strumenti della teoria dei giochi per modellizzare delle situazioni in cui si ammette che i votanti possano esprimere il loro voto in maniera *non sincera* e dunque seguendo una *strategia* al fine di far prendere al gruppo la decisione migliore. Richiameremo dunque alcuni concetti della teoria dei giochi di cui ci serviremo per mostrare alcune situazione paradigmatiche. In questa sezione seguiremo dunque i testi [8] per quanto riguarda la teoria dei giochi, e [3] per le situazioni da modellizzare.

## 5.1 Concetti fondamentali di Teoria dei giochi

**Definizione 19** (Strategia)**.** Una *strategia* è una qualunque combinazione di opzioni prese dall'insieme delle possibili azioni il cui risultato dipende non solo dalle azioni del giocatore che le adopera ma anche da quelle degli altri giocatori.

Chiameremo *profilo strategico o di strategie* l'insieme delle strategie adottate da tutti i giocatori durante una partita.

**Definizione 20** (Gioco in forma strategica)**.** Un *gioco in forma strategica* è una tupla G=$(N, \{S_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N})$,, dove

- N è l'insieme dei giocatori.
- $S_i$ è l'insieme delle strategie disponibili per il giocatore i. Definiamo anche con $S = \Pi_i S_i$ l'insieme di tutti i possibili profili strategici
- Le $u_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$ sono dette *funzioni di utilità o di payoff.* $u_i(s)$ è il *payoff* (o ricompensa) che il giocatore i ottiene se viene giocato il profilo di strategia s.

Assumeremo che l'obbiettivo di un giocatore sia di massimizzare il payoff.

Diremo che G è *finito* se S ed N sono di cardinalità finita.

Dato che ci occuperemo solamente di giochi in forma strategica, li indicheremo semplicemente come *giochi* senza ulteriori specificazioni.

**Definizione 21** (Deviazione vantaggiosa)**.** Dato un profilo strategico s, una *deviazione vantaggiosa da s per il giocatore i* è una strategia $s_i$ tale che lei e tutte le strategie adottate dagli altri giocatori ($s_{-i}$) formano un profilo strategico s' tale che

$$u_i(s') > u_i(s)$$

**Definizione 22** (Equilibrio di Nash)**.** Un profilo strategico s si dice *equilibrio di Nash* se nessun giocatore ha la possibilità di operare una deviazione vantaggiosa da s. Un equilibrio di Nash così definito viene spesso anche indicato come equilibrio puro di Nash o semplicemente come equilibrio.

**Definizione 23** (Strategia dominante)**.** Una strategia $s_i$ si dice *strettamente dominante* se per ogni altra strategia $s_i'$ adottabile da i allora ogni profilo strategico s tale che $s_i \in$ s ed s' tale che $s_i' \in s'$ soddisfano la relazione

$$u_i(s) > u_i(s')$$

Inoltre, una strategia si dice *debolmente dominante* se

$$u_i(s) \geq u_i(s')$$

Una strategia $s_i$ si dice strettamente dominata se esiste per i una strategia strettamente dominante diversa da $s_i$.

**Definizione 24** (Strategia Mista)**.** Dato un insieme finito X, sia $\Delta X$ l'insieme delle distribuzioni di probabilità su X.

Sia G=$(N, \{S_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N})$ un gioco finito.

Si dice *strategia mista* $\sigma_i$ un elemento di $\Delta S_i$.

Conseguentemente, definiremo i payoff per una strategia mista (sovrascrivendo la notazione) come: $u_i(\sigma) := E_{s\sim\sigma}[u_i(s)]$

**Definizione 25** (Equilibrio misto di Nash)**.** Un equilibrio di Nash per un gioco con strategie miste G è detto un *equilibrio di Nash misto di G*. Dunque, un profilo di strategie miste $\sigma \in \Pi_i \Delta S_i$ è un equilibrio di Nash misto se nessun giocatore può migliorare il suo payoff atteso passando ad un'altra strategia mista.

Enunciamo infine, per completezza di trattazione, il seguente teorema

**Teorema 7** (di Nash)**.** *Ogni gioco finito possiede un equilibrio di Nash misto.*

Diamo adesso due brevi esempi di gioco per mostrare una situazione di equilibrio e una di equilibrio misto di Nash.

*Esempio* 5 (Crisi dei missili di Cuba). Abbiamo due giocatori: URSS e USA. L'URSS deve decidere se posizionare dei missili a Cuba (G) oppure no (P). Gli Stati Uniti, di contro, possono lasciar correre (P), oppure contrattaccare (G) e scatenare una guerra nucleare se l'URSS avrà posizionato i missili, o semplicemente realizzare un'offensiva efficace in caso contrario. Il gioco dunque in questo caso non risulta simmetrico (i due giocatori hanno ruoli diversi). Vale la pena di analizzare i possibili risultati di questo gioco e, a tal fine, introduciamo una utile rappresentazione dei risultati attraverso la matrice di payoff.

| | | USA | |
|---|---|---|---|
| | | P | G |
| URSS | P | (0,0) | $(-10{,}10)$ |
| | G | $(-10{,}10)$ | $(-100, -100)$ |

In questo gioco possiamo apprezzare due equilibri puri di Nash: (P,G) e (G,P). In (P,G) l'URSS non ha motivo di modificare la propria strategia: passerebbe da un payoff di -10 a uno di -100. Analogamente gli USA non hanno alcun motivo di cambiare strategia: passerebbero da un payoff di +10 a uno di 0. La situazione è del tutto speculare nel caso (G,P).

*Esempio* 6. Consideriamo il gioco dei calci di rigore. In questo gioco abbiamo due giocatori: l'Attaccante ed il Portiere. L'Attaccante ha due scelte: tirare a destra (D) oppure tirare a sinistra (S). Il Portiere ha anch'egli due scelte: tuffarsi a destra (D) o tuffarsi a sinistra (S). La matrice di payoff è dunque così composta:

| | | Portiere | |
|---|---|---|---|
| | | S | D |
| Attaccante | S | (0,0) | $(-1,1)$ |
| | D | $(-1,1)$ | (0,0) |

Dunque in questo gioco supponiamo (per rendere i nostri conti più chiari), rispetto alle classiche regole del calcio, che se l'attaccante segna la sua squadra guadagna un punto e quella del portiere ne perde uno. Possiamo notare che in questa situazione non vi è alcun equilibrio classico. Proviamo a supporre adesso che i giocatori giochino una strategia mista, e vediamo se è possibile trovare un equilibrio misto. Sia p la probabilità con la quale l'Attaccante tira a destra (1-p a sinistra) e q la probabilità con la quale il portiere si tuffa a destra (1-q a sinistra). Imponendo che il payoff sia uguale indipendentemente dalla scelta di tirare/tuffarsi a destra o a sinistra si trova un equilibrio misto di Nash se p=q=1/2.

## 5.2 L'esempio dell'Urna

Anche nelle situazioni in cui si vota al fine di trovare l'alternativa *migliore* è possibile che i votanti decidano di votare in modo non sincero per cercare di far sì che collettivamente sia presa la decisione migliore. Sarà rilevante, in questa sottosezione come nella successiva, il concetto di *segnale*, inteso come un evento che condiziona le probabilità che una decisione presa da un votante sia quella corretta. L'assunzione implicita sarà che in generale un votante abbia la stessa probabilità p=$\frac{1}{2}$ di prendere la decisione giusta o quella sbagliata. Un individuo *sincero* voterà sempre per l'opzione che ha la probabilità maggiore di essere quella corretta. Un individuo *non sincero* potrebbe decidere di votare *strategicamente* in modo diverso.

Supponiamo di avere una squadra composta da tre individui A,B,C e due tipi di urne, $\alpha$ e $\beta$, entrambe contenenti dieci palline. L'urna di tipo $\alpha$ contiene dieci palline bianche, mentre l'urna di tipo $\beta$ contiene cinque palline bianche e cinque palline nere. I tre individui si trovano davanti ad un'urna senza sapere se sia di tipo $\alpha$ o di tipo $\beta$, e vi è un'uguale probabilità iniziale p=1/2 che l'urna sia $\alpha$ o $\beta$. Ogni individuo, a turno, estrae una pallina, la osserva (senza mostrarla agli altri) e la rimette nell'urna. Dopo che tutti e tre hanno osservato una pallina, i tre individui votano se l'urna sia di tipo $\alpha$ oppure di tipo $\beta$. Se almeno due individui su tre indovinano di che tipo è l'urna, allora tutta la squadra vince.

Analizziamo il comportamento degli individui. Inizialmente hanno tutti la stessa probabilità p=1/2 di votare $\alpha$ oppure $\beta$. Nel momento in cui un giocatore pesca una pallina dall'urna però, riceve un segnale, che cambia questa probabilità. Il segnale può essere di due tipi: *osserva bianca* oppure *osserva nera*, e i due segnali influenzano la probabilità che l'urna sia $\alpha$ oppure $\beta$. Prima di analizzare come cambiano le probabilità all'osservazione del segnale, calcoliamo le seguenti:

- $P(Osservo\, bianca) = P(Osservo\, bianca \,|\, Urna\, \alpha)P(Urna\, \alpha) +$
  $+P(Osservo\, bianca \,|\, Urna\, \beta)P(Urna\, \beta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
- $P(Osservo\, nera) = P(Osservo\, nera \,|\, Urna\, \alpha)P(Urna\, \alpha) +$
  $+P(Osservo\, nera \,|\, Urna\, \beta)P(Urna\, \beta) = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

Adesso esaminiamo come si comporta un votante sincero in risposta ai segnali che può ricevere.

- $P(Urna\, \alpha \,|\, Osservo\, bianca) = \frac{P(Osservo\, bianca \,|\, Urna \alpha)P(Urna\, \alpha)}{P(Osservo\, bianca)} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}$
- $P(Urna\, \beta \,|\, Osservo\, bianca) = \frac{P(Osservo\, bianca \,|\, Urna \beta)P(Urna\, \beta)}{P(Osservo\, bianca)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$
- $P(Urna\, \alpha \,|\, Osservo\, nera) = \frac{P(Osservo\, nera, \,|\, Urna \alpha)P(Urna\, \alpha)}{P(Osservo\, nera)} = 0$
- $P(Urna\, \beta \,|\, Osservo\, nera) = \frac{P(Osservo\, nera, \,|\, Urna \beta)P(Urna\, \beta)}{P(Osservo\, nera)} = 1$

Quindi un votante sincero che osserva bianca voterà $\alpha$ pur conservando un qualche dubbio, mentre un votante sincero che osserva nera sarà assolutamente certo che l'urna sia di tipo $\beta$. Se anche uno solo dei tre votanti A, B o C pescasse una pallina nera, non ci sarebbe alcun dubbio che l'urna sia di tipo $\beta$. Ammettiamo ancora che A, B e C votino tutti sinceramente. Attraverso altri semplici calcoli di probabilità, possiamo notare come, mantenendo la supposizione che la probabilità iniziale che l'urna sia di tipo $\alpha$ oppure $\beta$ sia $1/2$, la squadra non perda mai se l'urna è di tipo $\alpha$ (perché tutti e tre riceverebbero necessariamente un segnale Osservo bianca che li porterebbe a votare $\alpha$, seppur con ragionevole dubbio). Ciononostante, se l'urna è di tipo $\beta$, la squadra perde quando almeno due dei tre giocatori pesca una pallina bianca, dunque la probabilità che la squadra ha di perdere in questa situazione è $1/2$. In totale, la probabilità che la squadra ha di vincere è $3/4$. Supponiamo adesso però che A abbia studiato teoria dei giochi e probabilità e si sia accorto di un fatto: se l'urna è di tipo $\alpha$, il suo voto non influenza affatto il risultato finale, in quanto i suoi compagni di squadra, che votano sinceramente, voteranno senza dubbio $\alpha$. L'unica situazione in cui il voto di A conta davvero è quando l'urna è di tipo $\beta$. Se A pescasse una pallina bianca dunque, si troverebbe davanti a due situazioni: l'urna è di tipo $\alpha$, allora il suo voto non influenza il risultato e la squadra vincerà comunque, oppure l'urna è di tipo $\beta$ e lui, seguendo il suo segnale, potrebbe essere causa della sconfitta della squadra. A si rende dunque conto che votando sempre $\beta$, ignorando dunque il proprio segnale (assumendo che B e C invece lo tengano in considerazione) porta le probabilità di vittoria della squadra a $7/8$. Ad A conviene dunque non votare sinceramente.

## 5.3 Giuria unanime

Un altro interessante esempio nel quale emergono comportamenti non sinceri da parte dei votanti è quello della *giuria unanime*. L'esempio che andremo ad analizzare, mostra sostanzialmente una variante della situazione in cui abbiamo enunciato il teorema della giuria di Condorcet. Negli Stati Uniti, il sistema giudiziario prevede che un imputato sia condannato se e solo se tutti i giurati, all'unanimità, lo considerano colpevole. Il sistema è stato creato in questo modo per rendere meno probabile che un imputato innocente venga condannato. Sovrascriviamo la notazione precedentemente utilizzata: adesso scriveremo C per indicare "Colpevole" e I per indicare l'opzione "Innocente". Iniziamo col sottolineare le due differenze principali rispetto alla situazione del Teorema della Giuria di Condorcet. La prima differenza è che l'imputato viene condannato solo se il voto per condannarlo è unanime. La seconda differenza è il criterio secondo il quale viene chiesto di votare ai giurati. Precedentemente ciascun giurato votava C invece di E se la probabilità che C fosse corretta era maggiore della probabilità che E fosse corretta. In questo caso invece viene chiesto ai giurati di votare "Colpevole" se l'imputato è colpevole *oltre ogni ragionevole dubbio*. Ovvero se:

$$P(Imputato\ C \mid Informazioni\,disponibili\,) = z$$

Per un qualche z molto vicino a 1.

Dobbiamo tenere a mente che ogni giurato ha delle informazioni che ha ricavato dal processo. Queste informazioni avranno il ruolo del nostro *segnale*. Avremo due tipi di segnale: un C-segnale, che ci suggerisce che l'imputato è colpevole, ed un I-segnale, che ci suggerisce che l'imputato è innocente. Supponiamo che i segnali che indicano l'alternativa corretta siano di più di quelli che indicano l'alternativa errata. Quindi, per qualche $q > 1/2$ avremo una delle due seguenti situazioni:

- $P(C - Segnale \mid Imputato\,C) = q$
- $P(I - Segnale \mid Imputato\,I) = q$

Assumiamo, prima di ricevere qualunque segnale, che l'imputato abbia una probabilità p=1/2 di essere colpevole. Un giurato che riceve un C-segnale è interessato a conoscere la probabilità P(Imputato C | C-segnale). Analogamente un giurato che riceve un I-segnale è interessato a conoscere P(Imputato I | I-segnale). Usando la formula delle probabilità totali otteniamo che P(C-segnale)=P(I-segnale)=1/2. Dunque avremo che

- $P(Imputato\,I \mid I - segnale) = \frac{P(I-segnale \mid Imputato\,I)P(Imputato\,I)}{P(I-segnale)} = \frac{q/2}{1/2} = q$
- $P(Imputato\,C \mid C - segnale) = \frac{P(C-segnale \mid Imputato\,C)P(Imputato\,C)}{P(C-segnale)} = \frac{q/2}{1/2} = q$

Come precedentemente notato, il sistema è strutturato in modo da rendere più difficile che un innocente venga dichiarato colpevole. Ciononostante, le cose si complicano per la ragione seguente. Supponiamo di essere uno dei k giurati e di aver ricevuto un I-segnale. Inizialmente sembra chiaro il fatto che dovremmo votare per assolvere l'imputato. D'altronde il nostro segnale ci dà una probabilità $q > 1/2$ che l'imputato sia innocente. Ma dobbiamo anche tenere presente due cose: la prima è che il criterio secondo il quale ci è richiesto di votare è $P(Imputato\ C \mid Informazioni\,disponibili\,) > z$, il che significa che i segnali in possesso di tutti gli altri giurati (per informazioni disponibili intendiamo i segnali nella loro totalità) potrebbero essere sufficienti per far sì che la probabilità di colpevolezza sia maggiore di z nonostante il nostro I-segnale. In secondo luogo, ci chiediamo in quale situazione il nostro voto influenzi effettivamente il risultato. L'unica situazione del genere risulta essere quando tutti gli altri giurati tranne noi hanno votato per condannare l'imputato. Se supponiamo che tutti gli altri stiano votando sinceramente (e dunque secondo il loro segnale), dovremo concludere che tutti gli altri giurati abbiano ricevuto un C-segnale, mentre noi abbiamo ricevuto un I-segnale. Qual è in questo caso la probabilità che l'imputato sia colpevole? Ricordando che la probabilità di avere il segnale indicante l'alternativa corretta è q e supponendo che queste siano indipendenti tra loro, possiamo affermare che il numero di giurati avente il segnale corretto N segue una distribuzione binomiale di parametri k e q, dunque avremo che

$$P(Imputato\,C\,|Solo\,io\,ho\,I - segnale) =$$

$$= \frac{P(Solo\,io\,ho\,I - segnale\,|\,Imputato\,C)P(Imputato\,C)}{P(Solo\,io\,ho\,I - segnale)} = \frac{P(N = k-1)\frac{1}{2}}{P(Solo\,io\,ho\,I - segnale)}$$

Calcoliamo separatamente la probabilità di essere gli unici ad avere un I-segnale
$P(Solo\,io\,ho\,I{-}segnale) = P(Solo\,io\,ho\,I{-}segnale\,|\,Imputato\,C)P(Imputato\,C)+ P(Solo\,io\,ho\,I - segnale\,|\,Imputato\,I)P(Imputato\,I) = \frac{1}{2}q^{k-1}(1-q) + \frac{1}{2}q(1-q)^{k-1}$

Dunque, riprendendo i conti precedenti:

$$\frac{P(N = k-1)\frac{1}{2}}{P(Solo\,io\,ho\,I - segnale)} = \frac{\frac{1}{2}q^{k-1}(1-q)}{\frac{1}{2}q^{k-1}(1-q) + \frac{1}{2}q(1-q)^{k-1}} = \frac{q^{k-2}}{q^{k-2} + (1-q)^{k-2}}$$

Poiché $q > \frac{1}{2}$ il termine $(1-q)^{k-2}$ è molto più piccolo di $q^{k-2}$ per k per tende all'infinito. Dunque possiamo notare che

$$lim_{k\to+\infty}\frac{q^{k-2}}{q^{k-2} + (1-q)^{k-2}} = 1$$

Dunque, se la dimensione della giuria k è abbastanza grande, ciò significa che la probabilità P(Imputato C | Solo io ho I-segnale)>z.

Possiamo concludere che: se crediamo davvero che tutti stiano votando seguendo l'indicazione data dal loro segnale, ovvero sinceramente, ed il numero di giurati k è abbastanza grande, allora nell'unico caso in cui il nostro voto influenza la decisione della giuria dovremmo, al di là di ogni ragionevole dubbio, votare per condannare l'imputato, a prescindere dal segnale che abbiamo ricevuto. In questo modo un sistema che è stato creato per evitare condanne errate crea un incentivo per i giurati per votare la colpevolezza degli imputati.

È possibile fare un'ulteriore riflessione sugli equilibri che si possono creare in una giuria a voto unanime. Abbiamo appena mostrato che votare secondo il proprio segnale non è un equilibrio, in quanto se tutti gli altri giurati votano secondo il proprio segnale, la strategia migliore è ignorare il segnale e votare per condannare l'imputato. Un equilibrio banale si crea nella situazione in cui tutti i giurati votano per assolvere l'imputato: in questo caso nessun giurato può cambiare il risultato con il proprio voto e dunque non vi è nessun incentivo a cambiare strategia. Inoltre, vi è un unico equilibrio che possiede le seguenti proprietà:

1. Tutti i giurati usano la medesima strategia
2. Il voto di tutti i giurati è influenzato dal segnale ricevuto

Quello che mostreremo è un *equilibrio a strategia mista*, dove per strategia mista si intende che i giurati usano una strategia invece di un'altra con una probabilità p fissata, come illustrato nella sezione riguardante la teoria dei giochi. La situazione è la seguente: ogni giurato vota "Colpevole" se riceve un C-Segnale e vota colpevole con probabilità p se riceve un I segnale. È possibile mostrare che qualora i giurati seguano questa strategia, la probabilità di condannare un innocente corrisponde ad un numero positivo che non converge a zero al tendere all'infinito della dimensione della giuria. Ciò sembrerebbe in contrasto con il Teorema della Giuria di Condorcet, per il quale la probabilità di raggiungere il verdetto corretto tende ad uno al tendere di k all'infinito. Il problema sta nel fatto che la regola dell'unanimità incoraggia i votanti a "correggere" eccessivamente la probabilità che loro possano sbagliare votando seguendo il loro segnale, e ciò porta ad una notevole probabilità che il gruppo prenda la decisione errata.

# Capitolo 6

# Conclusioni

Nel corso della trattazione, siamo partiti dal definire il nostro concetto fondamentale, quello di *preferenza*, e ci siamo posti l'obbiettivo di analizzare i modi attraverso cui sia possibile giungere da un sistema di preferenze personali ad un sistema di preferenze che rappresenti in qualche modo la collettività. Il mezzo attraverso il quale siamo passati da una dimensione individuale a una dimensione collettiva è quello del sistema di voto. Sin da subito ci siamo però accorti come non esista un sistema di voto che soddisfi in maniera rassicurante le condizioni di cui dovrebbe godere un sistema considerabile come adeguatamente rappresentativo. Proseguendo nella trattazione abbiamo rilassato ed aggiunto ipotesi ove necessario al fine di esaminare una gamma di casi sempre più ampia: dalla situazione più astratta possibile, ovvero quella in cui i votanti sono sinceri, disinteressati e posseggono delle preferenze individuali soggette a minime ipotesi di coerenza siamo giunti ad una conclusione sconfortante, rappresentata dai Teoremi di Arrow e Gibbard-Satterthwhite. Abbiamo visto anche come però sia possibile proseguire nell'indagine spostando la nostra attenzione su situazioni più complesse, dove le preferenze degli individui soddisfino ulteriori proprietà e dove gli individui possano esprimere in maniera non sincera i loro voti al fine di perseguire una strategia. Le situazioni da modellare ed i campi da esaminare restano vasti e questi schemi astratti vanno poi calati nella realtà fattuale delle cose. La matematica, in questo senso, sta a monte del sistema democratico occidentale e la risposta alla domanda "Quale sistema di voto rappresenta meglio le preferenze di un elettorato" non può che venire da un rigoroso esame matematico della situazione. Il marchese De Condorcét, grande protagonista di questa trattazione, è stato l'aprifila di una serie di matematici prestati alle scienze sociali che si sono occupati dell'esame e della redazione dei sistemi elettorali moderni e dunque delle moderne democrazie. Così anche nei sistemi elettorali più semplici, come i proporzionali più puri, si scoprono problemi matematici profondi, come quello dell'assegnazione dei resti, per i quali la soluzione non è univoca né disinteressata, e l'adozione del quoziente di Hare al posto del metodo D'Hondt condiziona irreparabilmente l'esito finale del processo democratico. In maniera diversa, anche i sistemi maggioritari presentano arbitri di metodo che ne possono stravolgere il funzionamento. Anche al di fuori dell'ambito elettorale è possibile prendere in esame altre classi di problemi, come quelli trattati dalla teoria delle decisioni collettive e da tutti quei modelli che si occupano della formazione di opinioni e delle decisioni prese di conseguenza. Sebbene sia forse ingenuo sperare che la teoria matematica possa arrivare al punto di individuare un sistema "migliore" di tutti gli altri (e ci sarebbe da discutere sull'opportuna definizione di "migliore", compito che lasciamo alla Filosofia), resta comunque fondamentale, per il singolo, acquisire consapevolezza di quanto pesantemente il sistema adottato influenzi la decisione che sarà presa, anche solo per poter valutare, secondo i propri criteri, la correttezza di un processo. Supporre che le preferenze degli individui siano sempre transitive è quantomeno ottimista, ma avere consapevolezza delle possibili ciclicità può essere fondamentale quando sarà nostro compito organizzare l'ordine degli scontri. Si spera che questa consapevolezza sia usata a fin di bene.

# Bibliografia


[1] Acemoglu Daron, *Game Theory with Engineering Applications. Guest Lecture: Social Choce and Voting Theory*, MIT, 2010.
https://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-254-game-theory-with-engineering-applications-spring-2010/lecture-notes

[2] Acemoglu Daron, *Introduction to Political Economy. Lecture 1 and 2: Collective Choice and Voting*, MIT, 2018.
https://economics.mit.edu/files/15757

[3] Easley David, Kleinberg Jon, *Networks, Crowds and Markets: Reasoning about a Highly Connected World*, Cambridge University Press, 2010.

[4] Mas-Colell Andreu, Whinston Micheal D., Green Jerry R., *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, 1995.

[5] Mossel Elchanan, *Arrow Theorem*, Berkeley, 2014.
https://www.stat.berkeley.edu/ mossel/teach/SocialChoiceNetworks10/Oct7Oct14.pdf

[6] Mossel Elchanan, *Lecture: Condorcet's Jury Theorem*, Berkeley, 2010.
https://www.stat.berkeley.edu/ mossel/teach/SocialChoiceNetworks10/ScribeAug31.pdf.

[7] Olken Benjamin, *The Median Voter Theorem*, MIT, 2012
https://ocw.mit.edu/courses/economics/14-75-political-economy-and-economic-development-fall-2012/lecture-notes/

[8] Tamuz Omer. *Lecture Notes on Game Theory*, California Institute of Technology, 2018.
http://www.tamuz.caltech.edu/teaching/ss201b/lectures.pdf

[9] Vorob'ev N. N., *Game theory lectures for economists and systems scientists*, (tradotto da S. Kotz), Springer-Verlag, 1977.

[10] Zalta Edward, *"Social Choice Theory" The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Inverno 2013.
https://plato.stanford.edu/archives/win2013/entries/social-choice/

# Ringraziamenti

Ringrazio il professor Giacomo Como per aver accettato di accompagnarmi nell'esplorazione degli argomenti trattati. Ringrazio il professor Paolo Cortese per avermi fornito l'idea che è stata il nucleo di questa tesi, ma anche per l'ispirazione, il supporto, i consigli e l'affetto mostrati in questi anni. Ringrazio la mia famiglia per il supporto emotivo, affettivo ed economico datomi durante gli ultimi tre anni. Ringrazio Aurora per la compagnia, l'affetto e l'incoraggiamento che non mi ha mai negato, nonostante tutto. Ringrazio Adriano, Alessandro, Angelo, Gabriele e Jacopo, per l'amicizia fedele nonostante la distanza e la capacità di farmi sempre sorridere. Ringrazio i miei amici del Collegio Einaudi per avermi ascoltato quando ne avevo bisogno. Ringrazio Leonardo, per l'immenso supporto incondizionato, l'affetto irremovibile e la forza che mi ha sempre mostrato. Ringrazio Simone per aver segnalato gli errori di battitura. Ringrazio tutta la mia ”community di metanarratori” per le mille risate. Ringrazio il lettore per l'attenzione dedicatami.